المحاضرة 11

(1)

Subject:

نتيجة: أي متتالية $(A_n)_{n\ge1}$ من الجبر التام S فإن $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in S$

البرهان:

لدينا $A_n \in S \Rightarrow A_n^c \in S \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \in S$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in S \Rightarrow (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in S$

نتيجة: كل جبر تام على X هو جبر على X.

البرهان:

ليكن S جبراً تاماً على X ولتكن المجموعات $E_1, E_2, \dots, E_n$ مجموعات من S وبالتالي $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \in S$

$E_{n+1} = E_{n+2} = \dots = \emptyset$

$(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \in S$

← الشرط الثالث محقق من تعريف الجبر

$X \in S,\ \emptyset \in S$ تحقق الشرط الأول من الجبر

$A \in S \Rightarrow A^c \in S$ الثاني

P.S:

عكس النتيجة السابقة هو غير صحيح بشكل عام.

تعريف: الصف المطرد. يقال بأن الصف $M \subseteq P(X)$ أنه مطرد إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) من أجل أي متتالية متزايدة $(A_n)_{n\ge1}$ من الصف M فإن $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in M$ — متزايدة $A_n \subseteq A_{n+1}$

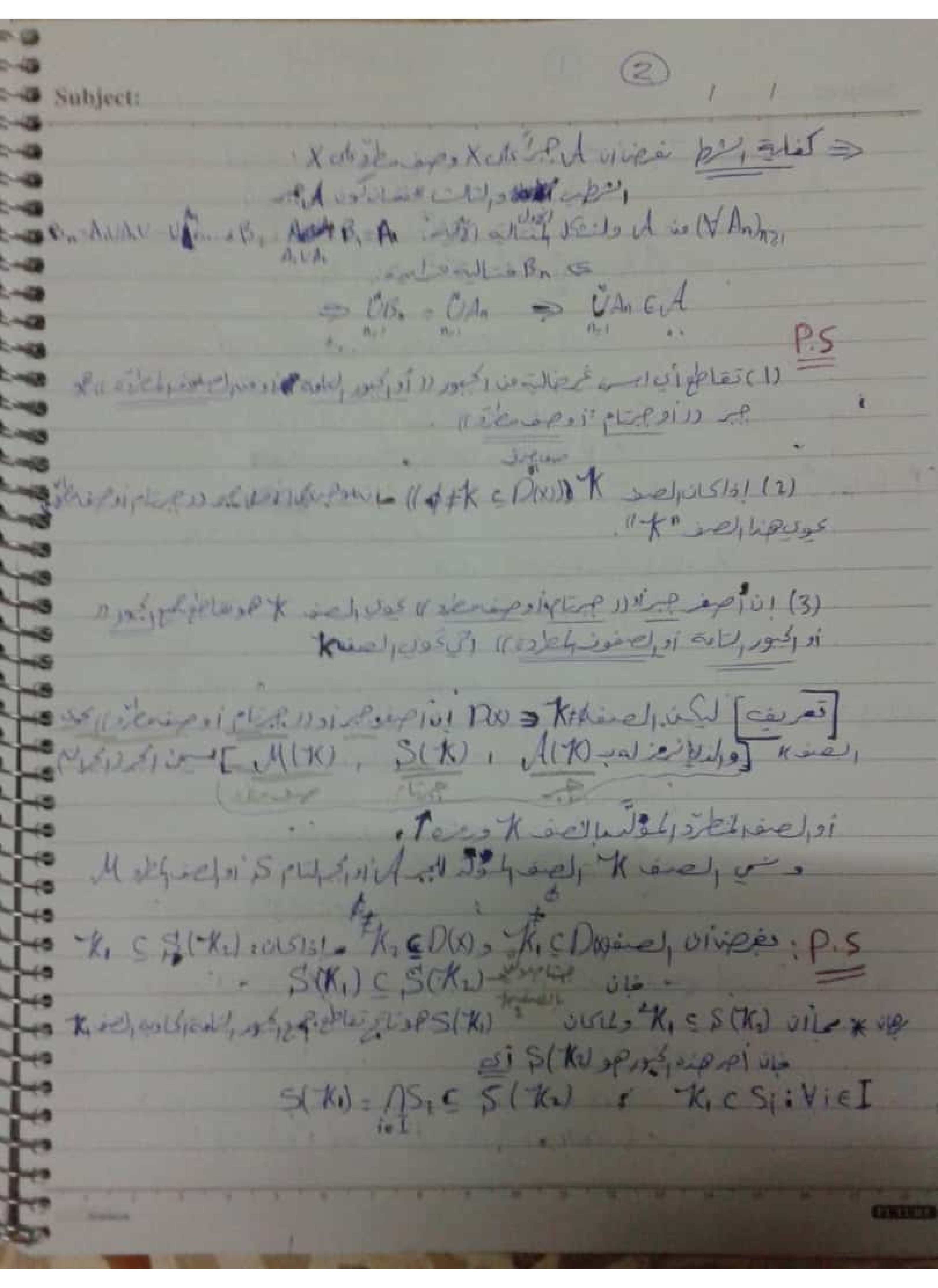
(2) من أجل أي متتالية متناقصة $(A_n)_{n\ge1}$ من الصف M فإن $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in M$ — متناقصة $A_{n+1} \subseteq A_n$

نتيجة (1): كل جبر تام هو صف مطرد.

مبرهنة: إذا كان $\mathcal{A}$ جبراً على X فإن $\mathcal{A}$ جبراً تاماً على X $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ صفاً مطرداً على X.

البرهان:

لزوم الشرط $\Leftarrow$: نفرض أن الصف $\mathcal{A}$ جبراً تاماً على X وبالتالي: $\forall (A_n)_{n\ge1}$ من الجبر التام $\mathcal{A}$ فيكون: $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$ و $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$ وبالتالي $\mathcal{A}$ صف مطرد.



Subject: (2) / /

⇐ كفاية الشرط: نفرض أن $\mathcal{A}$ جبر على X وصف مطرد على X ،

الشرط ... والذي نفرض أن $\mathcal{A}$ ...

$(\forall A_n)_{n \geq 1}$ من $\mathcal{A}$ ولنشكل المتتالية (الآتية) $B_1 = A_1$ ، $B_2 = A_1 \cup A_2$ ، ... ، $B_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

⇐ B_n متتالية متزايدة

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

P.S

(1) تقاطع أي أسرة غير خالية من الجبور (أو الجبور التامة أو من الصفوف المطردة) هو جبر (أو جبر تام أو صف مطرد).

(2) إذا كان الصف $\mathcal{K}$ $(\emptyset \neq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X))$ فإنه يوجد ... جبر (جبر تام أو صف مطرد) يحوي هذا الصف "$\mathcal{K}$".

(3) إن أصغر جبر أو (جبر تام أو صف مطرد) يحوي الصف $\mathcal{K}$ هو تقاطع جميع الجبور أو الجبور التامة أو الصفوف المطردة التي تحوي الصف $\mathcal{K}$.

[تعريف] ليكن الصف $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ إن أصغر جبر أو (جبر تام أو صف مطرد) يحوي الصف $\mathcal{K}$ [ونرمز له بـ $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ ، $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ ، $\mathcal{M}(\mathcal{K})$] يسمى الجبر أو الجبر التام

أو الصف المطرد المولد بالصف $\mathcal{K}$ ونرمز.

ونسمي الصف $\mathcal{K}$ الصف المولد للجبر $\mathcal{A}$ أو الجبر التام $\mathcal{S}$ أو الصف المطرد $\mathcal{M}$

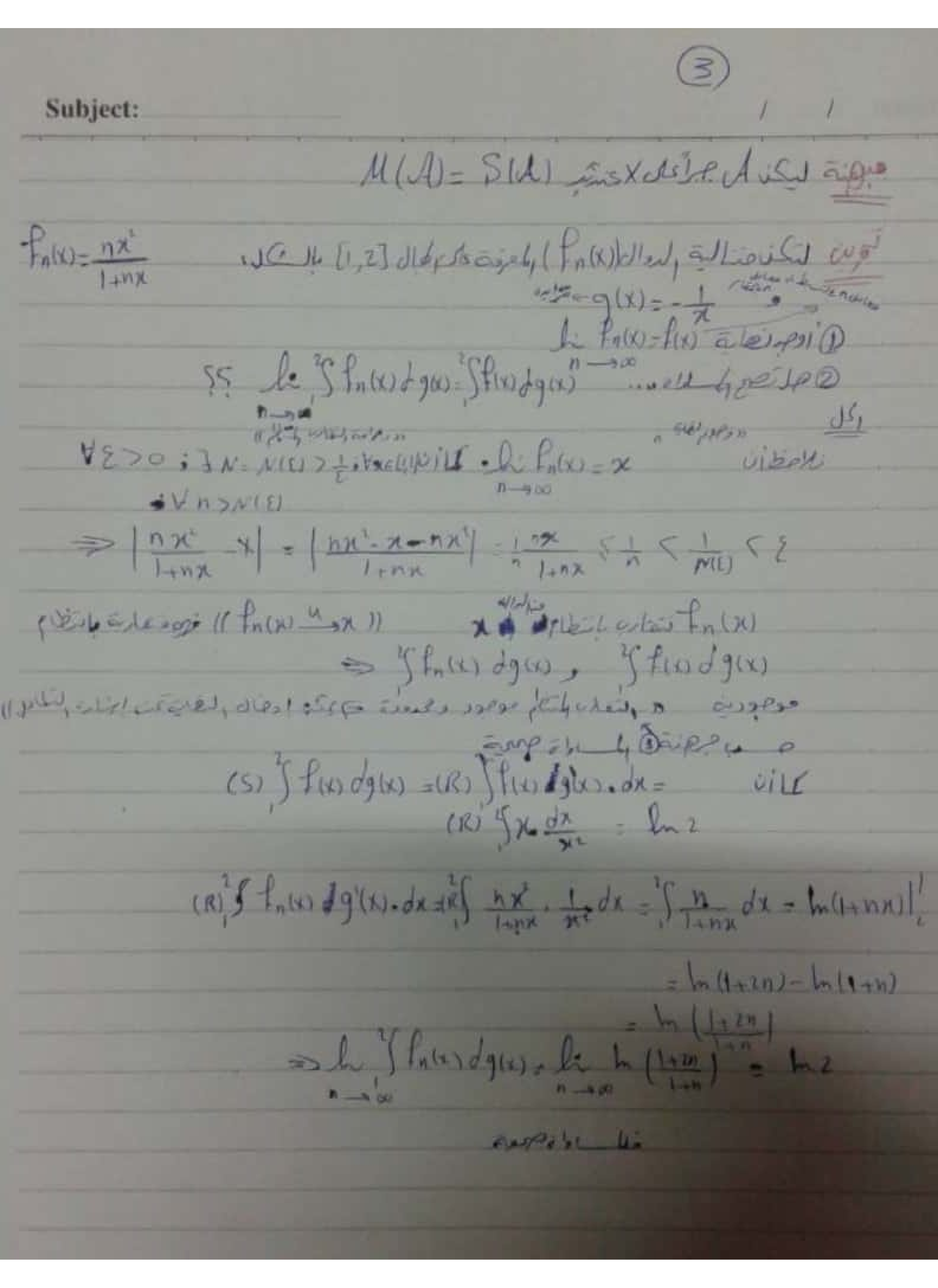
P.S: نفرض أن الصف $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{D}(X)$ و $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{D}(X)$ ، إذا كان: $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K}_2)$

فإن $\mathcal{S}(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K}_2)$.

* بيان: بما أن $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K}_2)$ ولما كان $\mathcal{S}(\mathcal{K}_1)$ هو ناتج تقاطع جميع الجبور التامة التي تحوي الصف $\mathcal{K}_1$

فإن أحد هذه الجبور هو $\mathcal{S}(\mathcal{K}_2)$ أي

$$\mathcal{K}_1 \subset S_i ; \forall i \in I \quad ; \quad \mathcal{S}(\mathcal{K}_1) = \bigcap_{i \in I} S_i \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{K}_2)$$



Subject: / /

مبرهنة ليكن A جبر أجزاء X حيث $M(A) = S(\mu)$

تمرين لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على المجال $[1,2]$ بالشكل: $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$

① أوجد نهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

② هل تصح العلاقة ... $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dg(x) = \int_1^2 f(x)\,dg(x)$ ؟؟

الحل

نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ ، لأن $\forall x \in [1,2]$ ، $\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$; $\forall n > N(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \left|\frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx}\right| = \frac{1}{n}\frac{nx}{1+nx} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$$

$f_n(x)$ تتقارب بانتظام من x (($f_n(x) \xrightarrow{u} x$))

$$\Rightarrow \int_1^2 f_n(x)\,dg(x) \;,\; \int_1^2 f(x)\,dg(x)$$

موجودة لأن التكاملات موجودة ومحققة ...

لكن

$$(S)\int_1^2 f(x)\,dg(x) = (R)\int_1^2 f(x)\,g'(x)\,dx = (R)\int_1^2 x\,\frac{dx}{x^2} = \ln 2$$

$$(R)\int_1^2 f_n(x)\,g'(x)\,dx = (R)\int_1^2 \frac{nx^2}{1+nx}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{n}{1+nx}\,dx = \ln(1+nx)\Big|_1^2$$

$$= \ln(1+2n) - \ln(1+n)$$

$$= \ln\left(\frac{1+2n}{1+n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_1^2 f_n(x)\,dg(x) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1+2n}{1+n}\right) = \ln 2$$

وهو المطلوب

Scanned by CamScanner